

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Hálkova 6, 461 17 Liberec 1, CZ

Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií

Teorie automatického řízení I.

**SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A
VÝSTUPY - MIMO SYSTÉMY**

Studijní materiály

Doc. Ing. Osvald Modrlák, CSc.



Katedra řídicí techniky

Obsah

7.	SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A VÝSTUPY - MIMO SYSTÉMY	2
7.1	Matematický popis MIMO systému.....	5
7.1.1	Popis pomocí diferenciální rovnice.....	5
7.1.2	Přenosová matice systému s více vstupy a výstupy	5
7.2	Bloková algebra vícerozměrových soustav.....	10
7.3	Autonomní regulace	14
7.4	Softwarová podpora	23
	Literatura	26

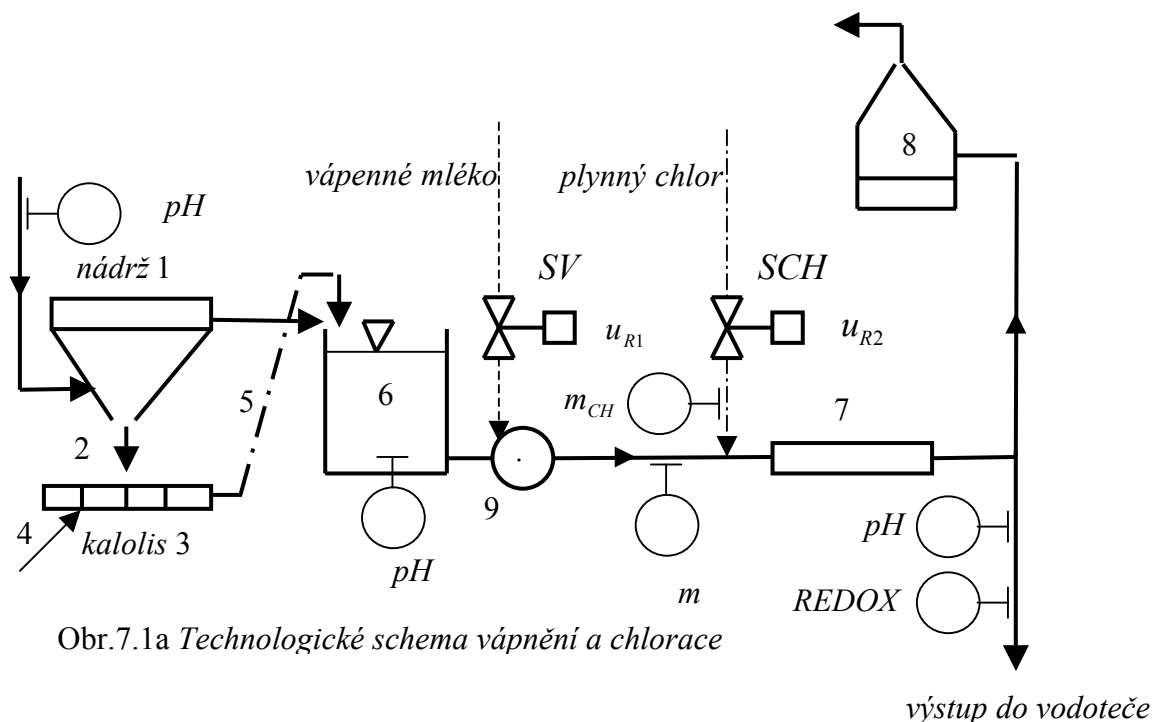
Tato kapitola představuje úvodní, elementární seznámení s dynamickými systémy s více vstupy a výstupy. Protože text je určen studentům, kteří zpravidla neměli možnost pracovat nebo podílet se na technických realizacích řízení technologických procesů, jsou v úvodu zařazeny a diskutovány dva příklady : technologický uzel vápnění a chlorace a uzel technologické úpravy páry. Dále obsahuje popis a blokovou algebru vícerozměrových systémů, a princip autonomní regulace.

7. SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A VÝSTUPY - MIMO SYSTÉMY

V technické praxi se běžně setkáváme s technologickými zařízeními, které mají více vstupních a výstupních veličin. Každá ze vstupních veličin může ovlivňovat současně více výstupních veličin. Vzájemnými interakcemi mezi vstupními a výstupními veličinami vznikají složité dynamické souvislosti a vazby. Tyto systémy se označují jako *vícerozměrové systémy* (Multivariable Systems), nebo jako *systémy s více vstupy a výstupy* (Multi-input multi-output systems, zkratka MIMO systémy). Zpětnovazební vícerozměrový regulační obvod obsahuje zpravidla více regulátorů, které mohou být ve vzájemné interakci. Složitost vazeb a interakcí bude demonstrována na následujících dvou příkladech.

Příklad 7.1

Uvažujme čističku odpadních vod s technologickým uzlem vápnění a chlorace dle obr.7.1a. Linku tvoří usazovací nádrž 1 s kalolise 3. Usazovací nádrž má přepad, který se přivádí do předlokové nádrže 6. Usazené kaly 2 jsou v kalolisech 3 lisovány na brikety. Kalolisy jsou periodicky dvakrát za směnu proplachovány vodou 4. Tato voda i filtrát se potrubím 5 přivádí do předlokové nádrže 6. Pro neutralizaci se používá vápenného mléka $\text{Ca}(\text{OH})_2$, které dávkuje servo vápnění SV. K likvidaci amonných iontů se používá plynný chlor, který je dávkován pomocí speciálního ventilu SCH. K promíchání všech komponent dochází ve statickém směšovači 7. Uvolněný plynný dusík a jeho další plynné sloučeniny se zachycují v reakční nádrži 8. Dávkování vápna i chlóru ovlivňuje současně jak kyselost vody tak i likvidaci amonných iontů. Požadovaný průtok zajišťuje oběhové čerpadlo 9.

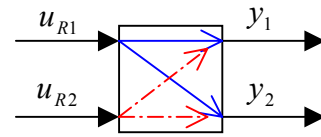


Měřené veličiny : **pH** na vstupu technologického úseku, objemový průtok **m**, poloha serva vápnění **u_{R1}** , kontrolní měření průtoku chlóru **m_{CH}** , **pH** vody na výstupu do vodoteče a redukční oxidační koeficient **REDOX**.

- Regulované veličiny:**- kyselost výstupní vody v *pH* ... y_1 ,
 - redukční oxidační koeficient **REDOX** výstupní vody ... y_2 .
- Akční veličiny:** - poloha serva vápnění ... u_{R1} ,
 - otevření ventilu (poloha) regulující průtok chloru ... u_{R2} .

Interakce mezi akčními veličinami u_{R1} , u_{R2} , a výstupními veličinami y_1 , y_2 v uzlu vápnění a chlorace jsou zobrazeny na obr.7.1b

Konec příkladu 7.1



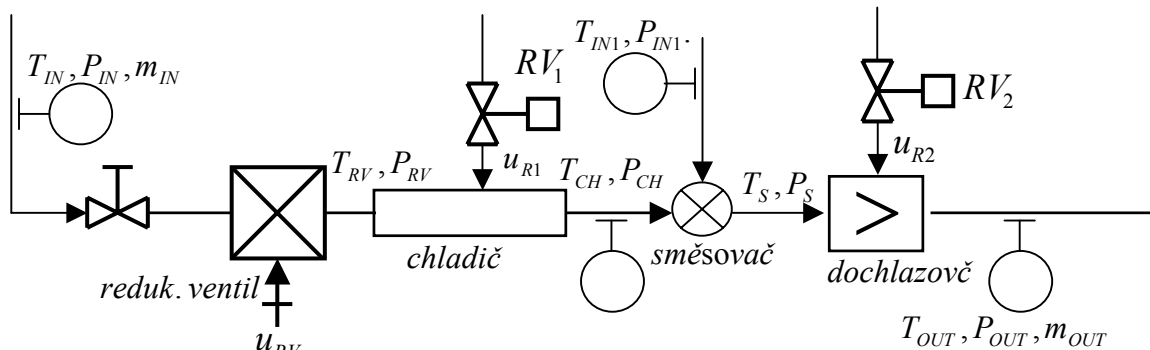
Obr.7.1b Interakce mezi akčními a výstupními veličinami

Složitější příklad vícerozměrového systému včetně umístění regulačních smyček je diskutován v druhém příkladě.

Příklad 7.2

Příkladem vícerozměrových soustav může být např. úprava páry, jejíž technologické schéma je na obr.7.2a. Pára z kotlů se přivádí do sběrnice ze které je část páry odváděna do technologie, která vyžaduje jiné parametry páry. Pára o teplotě T_{IN} , tlaku P_{IN} a průtočné hmotnosti m_{IN} vstupuje do uzlu technologické úpravy páry. Na výstupu jsou požadovány parametry páry T_{OUT} , P_{OUT} , m_{OUT} . Místa měření a parametry páry, které se měří, jsou označeny kroužky.

Úprava páry má čtyři stupně, které jsou řazeny do série. První stupeň tvoří redukční ventil, druhý stupeň chladič, následuje směšovač, do kterého je přiváděna pára o parametrech T_{IN1} , P_{IN1} a na závěr je zařazen dochlazovač.



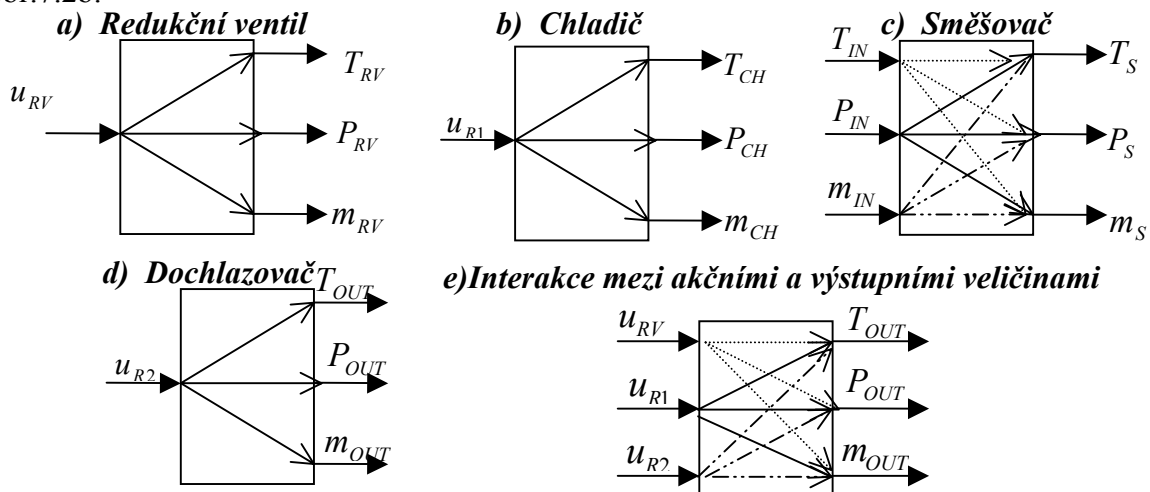
Obr.7.2a Technologické schéma úpravy páry

Teplota a tlak páry T_{RV} , P_{RV} za redukčním ventilem se mění pomocí zdvihu redukčního ventilu, který je ovládán akční veličinou u_{RV} .

Teplota a tlak páry T_{CH} , P_{CH} za chladičem se mění vstříkem kondenzátu. Vstříkované množství a jemu odpovídající změna teploty a tlaku T_{CH} , P_{CH} závisí na otevření regulačního ventilu RV_1 , tedy na akční veličině u_{R1} . Ve směšovači se směšuje pára o parametrech T_{IN1} , P_{IN1} s parou za chladičem o parametrech T_{CH} , P_{CH} . Teplota páry T_{IN1} mění současně teplotu i tlak za směšovačem T_S , P_S a podobně tlak P_{IN1} mění současně jak teplotu tak i tlak.

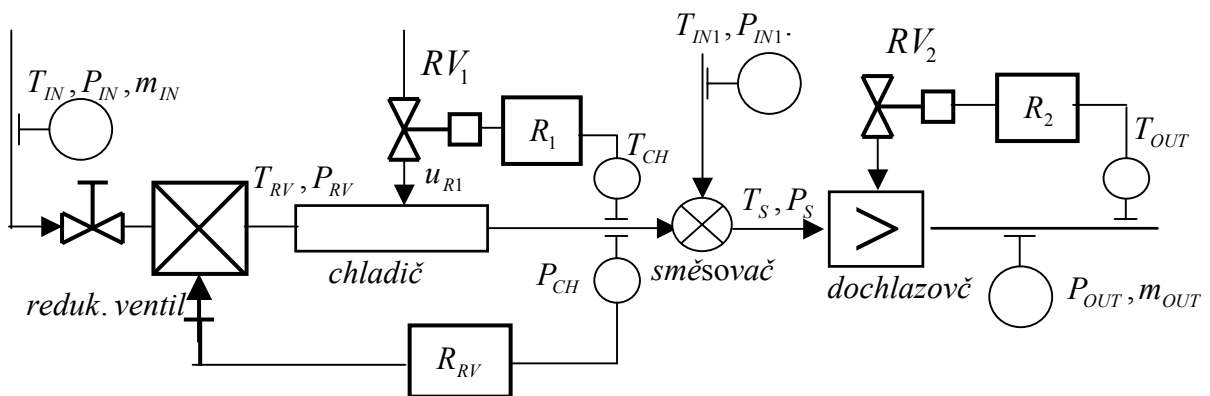
V dochlazovači se vyrovnává na žádanou hodnotu výstupní teplota vstříkem kondenzátu. Vstříkované množství a jemu odpovídající změna teploty a tlaku T_{OUT} , P_{OUT} závisí na otevření regulačního ventilu RV_2 , tedy na akční veličině u_R . Interakce mezi vstupními a vý-

stupními veličinami v jednotlivých stupních technologické úpravy páry jsou zobrazeny na obr.7.2b.



Obr.7.2b Interakce v jednotlivých stupních úpravy páry

Technologické schéma úpravy páry včetně klasické regulace je demonstrováno na obr.7.2c. Redukční ventil je v klasickém případě řízen regulátorem R_{RV} , přičemž regulovanou a měřenou veličinou je tlak za chladičem P_{CH} . Teplota za chladičem je řízena regulátorem R_1 , měřenou veličinou je teplota T_{CH} . Vstupem do směšovače je pára o parametrech T_{CH} , P_{CH} a pára o parametrech T_{IN1} , P_{IN1} . Předpokládá se, že tyto parametry jsou pevné. Za dochlazovačem je regulována pouze teplota T_{OUT} pomocí regulátoru R_2 . Měřena je teplota T_{OUT} .



Obr.7.2c Technologické schéma úpravy páry s regulací

Z uvedeného příkladu je zřejmá složitost vzájemných interakcí mezi vstupními a výstupními veličinami. Je též možno pozorovat volbu měřených a jejich využití v regulaci. Provedená analýza umožní později lépe a snáze pochopit nově zavedené pojmy "Zobecněný problém řízení (General Control Problem)" a "Strukturované a nestruturované neurčitosti modelu (Structured and Unstructured Uncertainty)".

Konec příkladu 7.2

7.1 MATEMATICKÝ POPIS MIMO SYSTÉMU

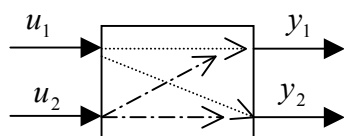
MIMO systémy je možno matematicky popsat soustavou diferenciálních rovnic, stavovou rovnicí nebo u lineárních t-invariantních soustav pomocí **přenosových matic**.

7.1.1 Popis pomocí diferenciální rovnice

Popis dynamického systému s více vstupy a výstupy pomocí soustavy diferenciálních rovnic bude demonstrován na následujícím příkladě.

Příklad 7.1.1

Uvažujme dynamický systém s dvěma vstupy u_1, u_2 a dvěma výstupy y_1, y_2 , který je popsán dvěma diferenciálními rovnicemi

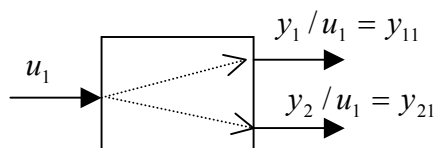


$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + y_2 &= -u_1 + 3u_2 + u_2', \\ y_1'' + 2y_1' + 4y_2' + 4y_2 &= -4u_1 - 3u_1' + 6u_2 + u_2'. \end{aligned} \quad (1)$$

Obr.7.1.1a Blokové schéma

Blokové schéma na obr. 7.1.1a. Položíme-li $u_2 = 0$, pak výstupy y_1, y_2 jsou popsány soustavou rovnic. Na obr.7.1.1b jsou zakresleny křížové vazby - interakce mezi u_1 a výstupními veličinami y_1, y_2

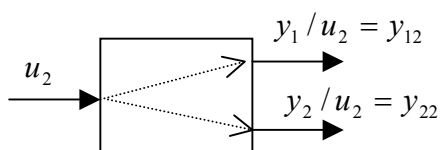
$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + y_2 &= -u_1, \\ y_1'' + 2y_1' + 4y_2' + 4y_2 &= -4u_1 - 3u_1'. \end{aligned}$$



Obr.7.1.1b Účinek u_1 na výstup y_1, y_2

Podobně pro $u_1 = 0$ dostaneme pro výstup y_1, y_2 soustavu rovnic. Na obr.7.1.1c jsou zakresleny křížové vazby - interakce mezi u_2 a výstupními veličinami y_1, y_2 .

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + y_2 &= +3u_2 + u_2', \\ y_1'' + 2y_1' + 4y_2' + 4y_2 &= 6u_2 + u_2'. \end{aligned}$$



Obr.7.1.1c Účinek u_2 na výstup y_1, y_2

Konec příkladu 7.1.1

7.1.2 Přenosová matice systému s více vstupy a výstupy

Matematický model aproximující dynamické vlastnosti lineárních t-invariantních systémů může být popsán pomocí **přenosových matic**. V této části si na jednoduchém příkladě ukážeme zavedení těchto matic a strukturu tohoto lineárního modelu.

Příklad 7.1.2

Uvažujme matematický popis soustavy s dvěma vstupy a výstupy z
Př.7.1.1.

$$\begin{aligned} y_1'' + 2y_1' + y_2 &= -u_1 + 3u_2 + u_2', \\ y_1'' + 2y_1' + 4y_2' + 4y_2 &= -4u_1 - 3u_1' + 6u_2 + u_2'. \end{aligned} \quad (1)$$

Vyjádříme-li L-obraz levé a pravé strany soustavy (1), při nulových počátečních podmínkách dostaneme

$$\begin{aligned} Y_1(s)s(s+2) + Y_2(s)(s+1) &= -U_1(s) + U_2(s)(3+s) \\ Y_1(s)s(s+2) + Y_2(s)4(s+1) &= -U_1(s)(4+3s) + U_2(s)(6+s) \end{aligned} \quad (2)$$

Zapišeme-li soustavu rovnic (2) maticově dostaneme rovnost

$$\begin{bmatrix} s(s+2) & (s+1) \\ s(s+2) & 4(s+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (3+s) \\ -(4+3s) & (6+s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}.$$

Laplaceův obraz vektoru výstupu je pak roven

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(s+2) & (s+1) \\ s(s+2) & 4(s+1) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & (3+s) \\ -(4+3s) & (6+s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Inverzní matici vypočteme podle vzorce $A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}$. Platí

$$\det \begin{bmatrix} s(s+2) & (s+1) \\ s(s+2) & 4(s+1) \end{bmatrix} = 3s(s+2)(s+1); \quad \text{adj} \begin{bmatrix} s(s+2) & (s+1) \\ s(s+2) & 4(s+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(s+1) & -(s+1) \\ -s(s+2) & s(s+2) \end{bmatrix}.$$

Dosažením determinantu a adjungované matice do inverze matice v (3) dostaneme

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{3s(s+2)(s+1)} \cdot \begin{bmatrix} 4(s+1) & -(s+1) \\ -s(s+2) & s(s+2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & (3+s) \\ -(4+3s) & (6+s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Roznásobením matic v rovnosti (4) dostaneme L-obraz vektoru výstupu ve tvaru

$$\mathbf{y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ -1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(s) \cdot \mathbf{u}(s),$$

$$\text{kde je } \mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ -1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \text{ přenosová matice rozměru } [2 \times 2],$$

$$\mathbf{y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} \quad \text{L-obraz vektoru výstupu rozměru } [2 \times 1],$$

$$\mathbf{u}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} \quad \text{L-obraz vektoru vstupu rozměru } [2 \times 1].$$

L-obraz výstupních veličin $Y_1(s), Y_2(s)$ je pak roven

$$Y_1(s) = F_{11}(s)U_1(s) + F_{12}(s)U_2(s) = \frac{1}{s+2} \cdot U_1(s) + \frac{1}{s} \cdot U_2(s),$$

$$Y_2(s) = F_{21}(s)U_1(s) + F_{22}(s)U_2(s) = -U_1(s) + \frac{1}{s+1} \cdot U_2(s).$$

Struktura matematického modelu dynamického systému, který je popsán přenosovou maticí je na obr.7.1.2

Konec příkladu 7.1.2

Obecně je výstup modelu (obr.7.1.3b) dynamického systému s p - vstupy a q - výstupy v maticovém zápisu roven

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{u}(s), \quad (7.1-1)$$

kde $\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) & \cdots & F_{1q}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) & \cdots & F_{2q}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_{p1}(s) & F_{p2}(s) & \cdots & F_{pq}(s) \end{bmatrix}$ je přenosová matice rozměru $[p \times q]$

$\mathbf{y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix}$ jsou vektory výstupu a vstupu rozměrů $[q \times 1]$, $[p \times 1]$.

Pozor! Násobení matic není komutativní, proto obecně platí $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

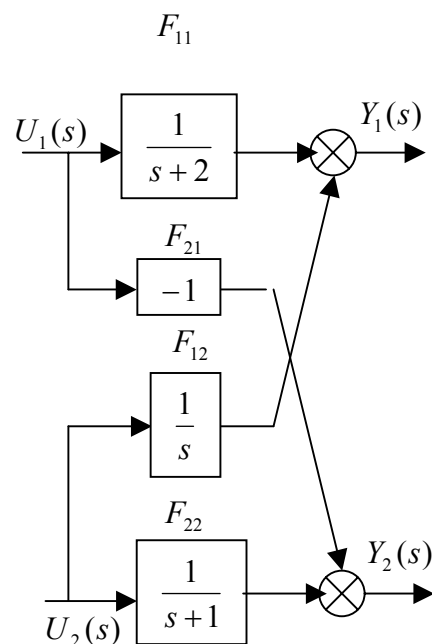
Obrazový přenos $F_{ij}(s)$ je definován $F_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)} \rightarrow Y_i(s) = F_{ij}(s)U_j(s)$,

kde index i označuje výstupní veličinu, index j vstupní (akční) veličinu.

Výstup i -té výstupní veličiny při vstupu všech p -akčních veličin bude roven

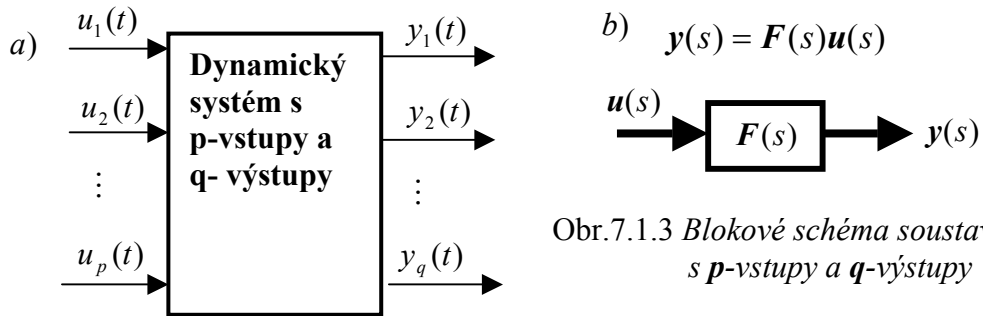
$$Y_i(s) = F_{i1}(s)U_1(s) + F_{i2}(s)U_2(s) + \cdots + F_{ip}(s)U_p(s) = \sum_{j=1}^p F_{ij}(s)U_j(s). \quad (7.1-2)$$

Blokové schéma soustavy s p -vstupy a q -výstupy je na obr.7.1.3a,b. Na obrázku 7.1.3a je nakresleno schéma, ve kterém je zobrazen každý z p -vstupů a q -výstupů samostatně. Na



Obr.7.1.2 Struktura modelu pro dva vstupy a výstupy

obr.7.1.3b je vícerozměrnost vyjádřeno vektory vstupu $u(s)$ a výstupu $y(s)$, včetně přenosové matice $F(s)$.



Obr.7.1.3 Blokové schéma soustavy s p-vstupy a q-výstupy

Práci s přenosovou maticí si ověříme na následujícím příkladě.

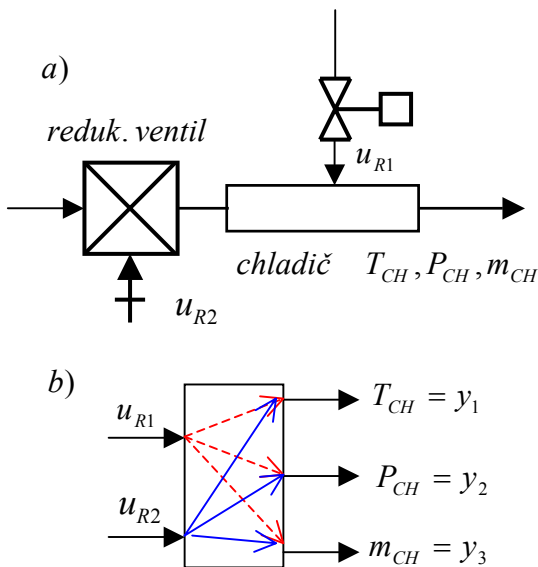
Příklad 7.1.3

Uvažujme technologickou část **redukční ventil-chladič** viz obr7.1.4a. Určete vektor obrazu výstupu a nakreslete vnitřní strukturu modelu, jestliže je přenosová matice F rovna

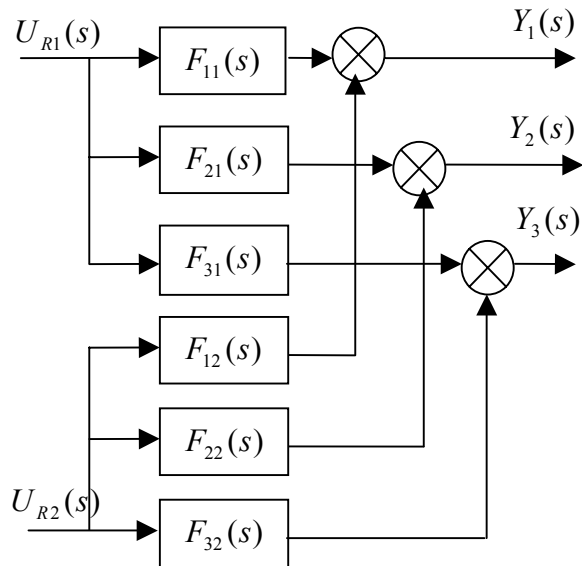
$$F(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \\ F_{31}(s) & F_{32}(s) \end{bmatrix}$$

Řešení: Aproximovaná soustava přenosovou maticí má $p=2$ vstupních veličin u_{R1}, u_{R2} , a $q=3$ výstupních veličin T_{CH}, P_{CH}, m_{CH} . Vzájemné interakce jsou vyznačeny na obr.7.1.4b včetně zavedení nového označení.

Podle (7.1-1) platí



Obr.7.1.4a) Technologické schéma, b) interakce



Obr.7.1.4c Struktura modelu pro 2 vstupy a 3 výstupy

$$y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = F(s)u(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \\ F_{31}(s) & F_{32}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(s)U_1(s) + F_{12}(s)U_2(s) \\ F_{21}(s)U_1(s) + F_{22}(s)U_2(s) \\ F_{31}(s)U_1(s) + F_{32}(s)U_2(s) \end{bmatrix}$$

Struktura modelu je na obr.7.1.4c.

Konec příkladu 7.1.3

Na základě známé přenosové matice $F(s)$ je možno definovat přechodovou funkci $h_{ij}(t)$.

Přechodová funkce $h_{ij}(t)$ je odezva i -té výstupní veličiny na jednotkový skok na j -té akční veličině při nulových počátečních podmínkách.

Podobně je možno definovat váhovou funkci $g_{ij}(t)$.

Váhová funkce $g_{ij}(t)$ je odezva i -té výstupní veličiny na jednotkový impuls na j -té akční veličině při nulových počátečních podmínkách.

Z praktického hlediska jsou významné ustálené stavy, které je možno spočítat:

a) z Laplaceova obrazu výstupního vektoru $y(s)$ pomocí limitních vět

$$\mathbf{y}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \mathbf{y}(s) = \begin{bmatrix} \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) \\ \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) \\ \vdots \\ \lim_{s \rightarrow 0} s Y_q(s) \end{bmatrix}. \quad (7.1-3)$$

b) Z ustálených hodnot přechodových funkcí

$$y_i(\infty) = h_{i1}(\infty)u_1(\infty) + h_{i2}(\infty)u_2(\infty) + \dots + h_{ip}(\infty)u_p(\infty) = \sum_{k=1}^p h_{ik}(\infty)u_k(\infty) \quad (7.1-4)$$

c) Ze soustavy diferenciálních rovnic popisující vícerozměrový systém

Pro ustálený stav, pokud existuje derivace $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t)^{(k)} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} u_j(t)^{(k)} = 0$ pro $k \geq 1$ a

$i = 1, 2, \dots, q$; $j = 1, 2, \dots, p$.

Příklad 7.1.4

$$\text{Přenosová matice soustavy je } \mathbf{F}_U(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{0,25}{(2s+1)^2} & \frac{1}{(2s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Určete: Vektor ustálených výstupních veličin pro vstupní signály $u_1(t) = -2 \cdot 1(t)$, $u_2(t) = 1(t)$.

Řešení: Vektor výstupu je roven

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_U(s)\mathbf{u}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{0,25}{(2s+1)^2} & \frac{1}{(2s+1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{s} \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{s(s+1)} \\ \frac{0,5}{s(2s+1)^2} \end{bmatrix}.$$

Podle (7.1-3) je vektor ustálených výstupů roven

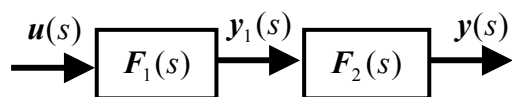
$$\mathbf{y}(\infty) = \begin{bmatrix} y_1(\infty) \\ y_2(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{s \rightarrow 0} s Y_1(s) \\ \lim_{s \rightarrow 0} s Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lim_{s \rightarrow 0} s \left(-\frac{3}{s(s+1)} \right) \\ \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{0,5}{s(2s+1)^2} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Konec příkladu 7.1.4

7.2 BLOKOVÁ ALGEBRA VÍCEROZMĚROVÝCH SOUSTAV

V této kapitole bude vysvětlen princip a pravidla blokové algebry soustav s více vstupy a výstupy. Nejdříve odvodíme sériové a zpětnovazební zapojení. Rovnice výstupu začínáme sestavovat od výstupu.

a) *Sériové zapojení* dvou bloků dle obr.7.2.1.



Obr.7.2.1 Sériové zapojení

Podle (7.1-1) jsou vektory $\mathbf{y}(s)$, $\mathbf{y}_1(s)$ rovny

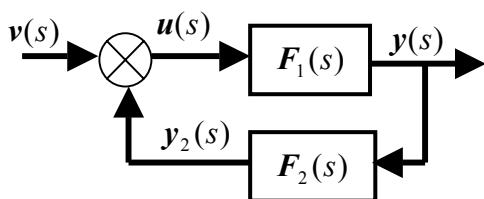
$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_2(s)\mathbf{y}_1(s) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_1(s) = \mathbf{F}_1(s)\mathbf{u}(s) \quad (2)$$

Dosazením z (2) do (1) dostaneme

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_2(s)\mathbf{F}_1(s)\mathbf{u}(s). \quad (7.2-1)$$

b) *Zpětnovazební řazení bloků*



Obr.7.2.2 Zpětnovazební zapojení

Vyjádříme-li $\mathbf{y}(s)$ dostaneme

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_1(s)\mathbf{u}(s). \quad (1)$$

Vektor $\mathbf{u}(s)$ je dán součtem

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{v}(s) + \mathbf{y}_2(s) = \mathbf{v}(s) + \mathbf{F}_2(s)\mathbf{y}(s) \quad (2)$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_1(s)\mathbf{u}(s) = \mathbf{F}_1(s)[\mathbf{v}(s) + \mathbf{F}_2(s)\mathbf{y}(s)].$$

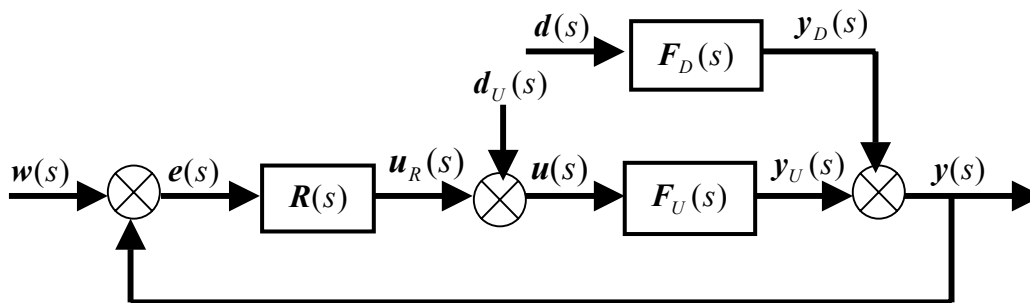
Převedením členů s $\mathbf{y}(s)$ na levou stranu získáme rovnost $[\mathbf{I} - \mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)]\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_1(s)\mathbf{v}(s)$. Po úpravě dostaneme

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{I} - \mathbf{F}_1(s)\mathbf{F}_2(s)]^{-1} \mathbf{F}_1(s)\mathbf{v}(s). \quad (7.2-2)$$

c) *Vícerozměrový model zpětnovazebnímu regulačního obvodu s poruchami*

Uvažujme vícerozměrový regulační obvod s neměřenými poruchami $\mathbf{d}(t)$ a poruchami na akčních veličinách $\mathbf{d}_U(t)$. Dynamický účinek poruch $\mathbf{d}(t)$ a akčních veličin $\mathbf{u}(t)$ je

aproximován přenosovými maticemi $F_D(s)$ a $F_U(s)$. Uvažujeme matici regulátorů $R(s)$ a vektor žádaných hodnot $w(s)$. Schéma tohoto obvodu je na obr.7.2.3.



Obr.7.2.3 Vícerozměrový model zpětnovazebního regulačního obvodu s poruchami

Odvodíme obrazové přenosy uzavřeného obvodu $F_{YD}(s)$, $F_{EW}(s)$, $F_{URD}(s)$, na vstupující vektor poruch $d(t)$,

Řešení:

a) Určení přenosu $F_{YD}(s)$, $w(t) = d_U(t) = 0$

Vektor výstupu $y(s)$ je dán součtem

$$y(s) = y_U(s) + y_D(s), \quad (1)$$

$$\text{kde } y_D(s) = F_D(s)d(s), \quad (2)$$

$$y_U(s) = F_U(s)u(s) = F_U(s)[u_R(s) + d_U(s)] = F_U(s)u_R(s). \quad (3)$$

Výstup z matice regulátorů je $u_R(s) = R(s)e(s) = R(s)[w(s) - y(s)]$.

Podle předpokladu je $w(s) = 0$, takže

$$u_R(s) = -R(s)y(s). \quad (4)$$

Dosazením (2) do (1) a (4) do (3) a následně (3) do (1) dostaneme

$$y(s) = y_U(s) + y_D(s) = F_D(s)d(s) - F_U(s)R(s)y(s). \quad (5)$$

Po úpravě je vektor výstupu $y(s)$ roven

$$\boxed{y(s) = [I + F_U(s)R(s)]^{-1} F_D(s)d(s) = F_{YD}(s)d(s)} \quad (7.2-3)$$

kde je $F_{YD}(s) = [I + F_U(s)R(s)]^{-1} F_D(s)$.

b) Určení přenosu $F_{EW}(s)$, $d(s) = d_U(s) = 0$

Vektor regulačních odchylek je roven

$$e(s) = w(s) - y(s) = w(s) - F_U(s)R(s)e(s). \quad (1)$$

Po úpravě je vektor regulačních odchylek roven

$$\boxed{e(s) = [I + F_U(s)R(s)]^{-1} w(s) = F_{EW}(s)w(s),} \quad (7.2-4)$$

kde je $\mathbf{F}_{EW}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{F}_U(s)\mathbf{R}(s)]^{-1}$.

c) Určení přenosu $\mathbf{F}_{URD}(s)$, $\mathbf{w}(s) = \mathbf{d}_U(s) = \mathbf{0}$

Vektor výstupu z regulátoru $\mathbf{u}_R(s)$ je roven

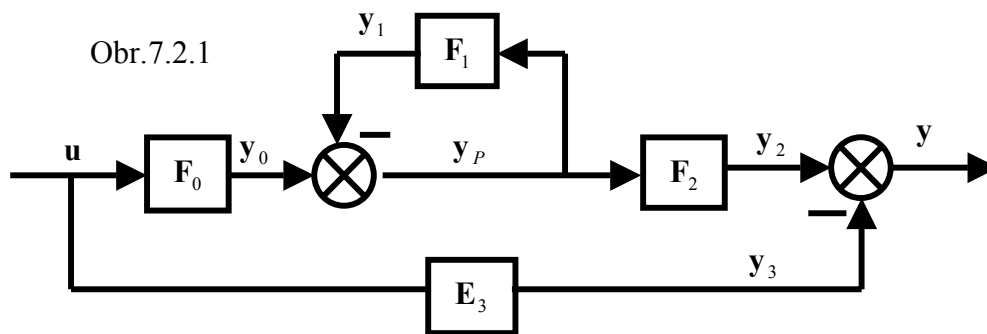
$$\begin{aligned}\mathbf{u}_R(s) &= \mathbf{R}(s)\mathbf{e}(s) = -\mathbf{R}(s)\mathbf{y}(s) = -\mathbf{R}(s)[\mathbf{y}_d(s) + \mathbf{y}_U(s)] = \\ &= -\mathbf{R}(s)[\mathbf{F}_D(s)\mathbf{d}(s) + \mathbf{F}_U(s)\mathbf{u}_R(s)]\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme vektor akčních veličin $\mathbf{u}_R(s)$ ve tvaru

$$\boxed{\mathbf{u}_R(s) = -[\mathbf{I} + \mathbf{R}(s)\mathbf{F}_U(s)]^{-1} \mathbf{R}(s)\mathbf{F}_D(s)\mathbf{d}(s)}. \quad (7.2-5)$$

Příklad 7.2.1

Určete L-obraz vektoru výstupu vícerozměrového systému z obr.7.2.1.



Řešení: Postupujeme od výstupu a píšeme

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(s) &= \mathbf{y}_2(s) - \mathbf{y}_3(s); \quad \mathbf{y}_2(s) = \mathbf{F}_2(s)\mathbf{y}_P(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{F}_1(s)]^{-1} \mathbf{y}_0(s); \quad \mathbf{y}_3(s) = \mathbf{F}_3(s)\mathbf{u}(s), \\ \mathbf{y}(s) &= -\mathbf{F}_3(s)\mathbf{u}(s) + [\mathbf{I} + \mathbf{F}_1(s)]^{-1} \mathbf{F}_0(s)\mathbf{u}(s)\end{aligned}$$

Po úpravě dostaneme $\mathbf{y}(s) = \left\{ -\mathbf{F}_3(s) + [\mathbf{I} + \mathbf{F}_1(s)]^{-1} \mathbf{F}_0(s) \right\} \mathbf{u}(s) = \mathbf{F}_{YU}(s)\mathbf{u}(s)$,

$$\text{kde } \left\{ -\mathbf{F}_3(s) + [\mathbf{I} + \mathbf{F}_1(s)]^{-1} \mathbf{F}_0(s) \right\} = \mathbf{F}_{YU}.$$

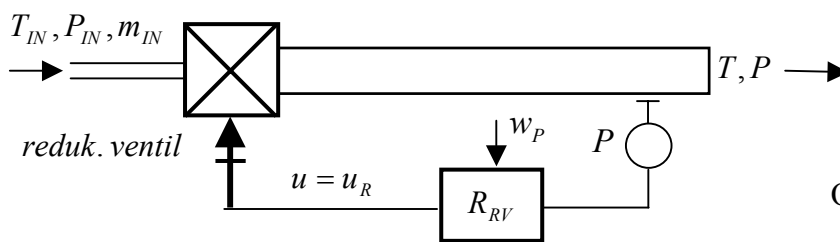
Konec příkladu 7.2.1

Příklad 7.2.2

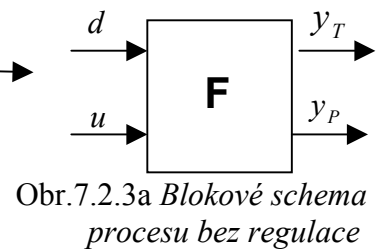
Uvažujme vstupní část technologického schématu chladiče s redukčním ventilem z Příkladu 7.2. Do redukční stanice vstupuje pára o tlaku, teplotě a množství, které je konstantní. P_{IN} , T_{IN} a m_{IN} viz obr.7.2.2. Pomocí redukčního ventilu pára expanduje a tím se zvyšuje její objem a snižuje se současně tlak i teplota. **Akční veličinou** je signál "u", pomocí kterého je řízen zdvih redukčního ventilu, což působí současně změnu tlaku P i teploty páry T . Uvažujme, že nežádoucí změny výstupních veličin jsou způsobeny účinkem **neměřené poruchové veličiny "d"**. Dynamické účinky **akční i poruchové veličiny** jsou aproximovány přenosovou maticí

$$F = \begin{bmatrix} F_{PU} & F_{Pd} \\ F_{TU} & F_{Td} \end{bmatrix}, \text{ ke je } F_{PU} = \frac{Y_P(s)}{U(s)}, F_{Pd} = \frac{Y_P(s)}{D(s)}, F_{TU} = \frac{Y_T(s)}{U(s)}, F_{Td} = \frac{Y_T(s)}{D(s)}.$$

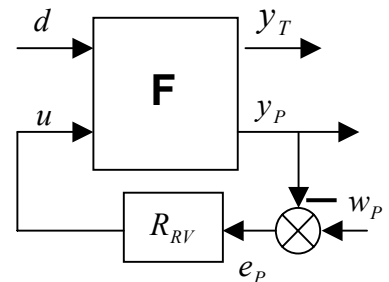
Pro regulaci tlaku je použit regulátor R_{RV} , jehož vstupem je měřený tlak P a w_P viz obr.7.2.2.



Obr.7.2.2 Technologické schéma části chladiče s redukčním ventilem a regulací tlaku



Obr.7.2.3a Blokové schéma procesu bez regulace



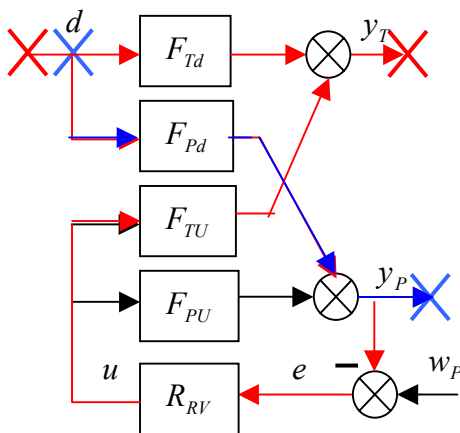
Obr.7.2.3b Blokové schéma s regulátorem

Úkol:

- 1) Nakreslete blokové schéma technologického schématu bez regulace a s regulací
- 2) Pomocí jednotlivých dílčích přenosů vyjádřete L-obraz výstupních veličin $Y_T(s), Y_P(s)$ na vstup poruchové veličiny $D(s)$.

Řešení:

- 1) Blokové schéma obvodu bez regulátoru je na obr.7.2.3a. Má dvě vstupní veličiny d, u a dvě výstupní y_T, y_P . Měřenou veličinou je pouze tlakový signál y_P . S regulátorem je blokové schéma na obr.7.2.3b. Signál d reprezentuje externí poruchovou veličinu. Regulovanou veličinou je tlakový signál y_P .



Obr.7.2.4 Struktura obvodu s regulátorem

- 2) Obraz výstupních veličin $Y_T(s), Y_P(s)$ určíme buď tak, že vícerozměrový obvod popíšeme přenosovými maticemi, nebo že rozkreslíme strukturu přenosové matice viz obr.7.2.4 a aplikujeme Masonův vzorec.

$$Y_T(s) = \frac{F_{Td}(1 + F_{Pd}R_{RV}) - F_{Pd}R_{RV}F_{TU}}{1 + F_{Pd}R_{RV}} \cdot D(s),$$

$$Y_P(s) = \frac{F_{Pd}}{1 + F_{Pd}R_{RV}} \cdot D(s).$$

Konec příkladu

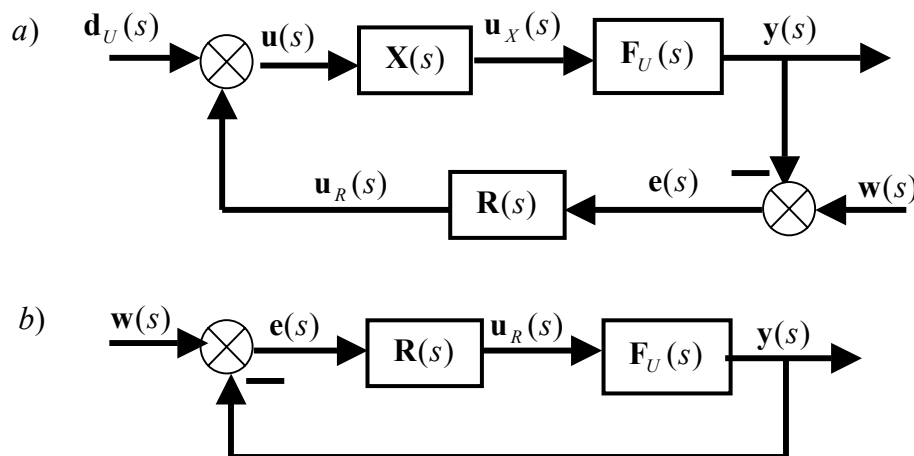
7.3 AUTONOMNÍ REGULACE

Jestliže chceme seřizovat jednotlivé regulátory typu PID v MIMO systému klasickými metodami, které jsou popsány v "Syntéze regulačních obvodů", pak křížové vazby ztěžují a prakticky téměř znemožní seřizování. Proto při seřizování regulátorů na změny žádané hodnoty se hledá takové zapojení zpětnovazebního obvodu, které eliminuje účinek křížových vazeb mezi jednotlivými akčními a výstupními veličinami. Hovoříme pak o **autonomní regulaci**, která zajistí, že jeden regulátor řídí vždy jen jednu regulovanou veličinu.

Podmínkou autonomní regulace je, aby přenosová matice uzavřeného obvodu $\mathbf{F}_{yW}(s) \rightarrow$ **byla diagonální**.
L-obraz vektoru výstupu je pak roven
$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{F}_{yW}(s)\mathbf{w}(s)$$

Autonomní chování obvodu je možno zajistit principálně dvěma zpětnovazebními schémata, které **eliminují účinek křížových vazeb**:

- Zavedením matice filtrů \mathbf{X} v přímé větvi, matice regulátorů \mathbf{R} je pak diagonální matice viz obr.7.3.1a.
- Pouze pomocí matice regulátoru \mathbf{R} ve zpětné vazbě viz obr. 7.3.1b.



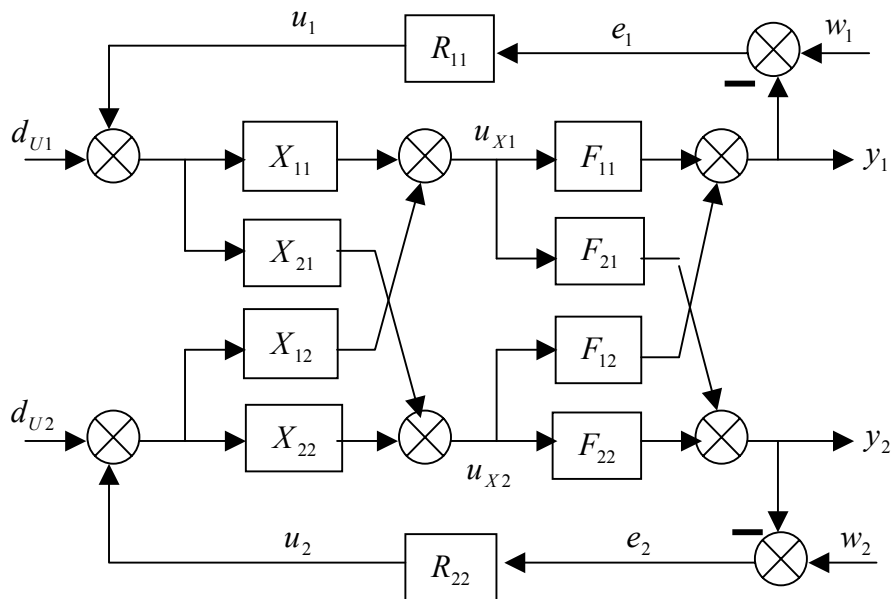
Obr.7.3.1 a) Struktura autonomního obvodu s maticí filtru \mathbf{X}
b) Struktura autonomního obvodu s maticí regulátorů \mathbf{R}

a) Autonomní obvod s maticí filtru v přímé větvi

Strukturu a návrh autonomního obvodu s filtrem vysvětlíme na soustavě s dvěma vstupy a dvěma výstupy. Přenosová matice soustavy, regulátoru a zatím neurčená matice filtrů mají tvar

$$\mathbf{F}_U(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & 0 \\ 0 & R_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} X_{11}(s) & X_{12}(s) \\ X_{21}(s) & X_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Struktura autonomní regulace s filtrem v přímé větvi pro soustavu s dvěma vstupy a výstupy je na obr.7.3.2.



Obr.7.3.2 Struktura autonomní regulace s filtrem X v přímé větvi pro soustavu s dvěma vstupy a výstupy

Pomocí blokové algebry vícerozměrových soustav určíme L-obraz výstupu $y(s)$

$$y(s) = [I + F_U(s)X(s)R(s)]^{-1} F_U(s)X(s)R(s) \cdot w(s) = F_{YW}(s) \cdot w(s), \quad (7.3-1)$$

kde $F_{YW}(s)$ je matice $F_{YW}(s) = [I + F_U(s)X(s)R(s)]^{-1} F_U(s)X(s)R(s)$.

Z podmínky autonomnosti plyne, že matice $F_{YW}(s)$ musí být diagonální. Protože matice regulátorů $R(s)$ je diagonální, je třeba pouze zajistit vhodnou volbou koeficientů filtru tak, aby součin $F_U(s)X(s)$ byl diagonální. Pro soustavu s dvěma vstupy a výstupy musí platit

$$F_U(s)X(s) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}X_{11} + F_{12}X_{21} & F_{11}X_{12} + F_{12}X_{22} \\ F_{21}X_{11} + F_{22}X_{21} & F_{21}X_{12} + F_{22}X_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \text{diag.}$$

Prvky nad a pod diagonálou musí být nulové a tedy platí

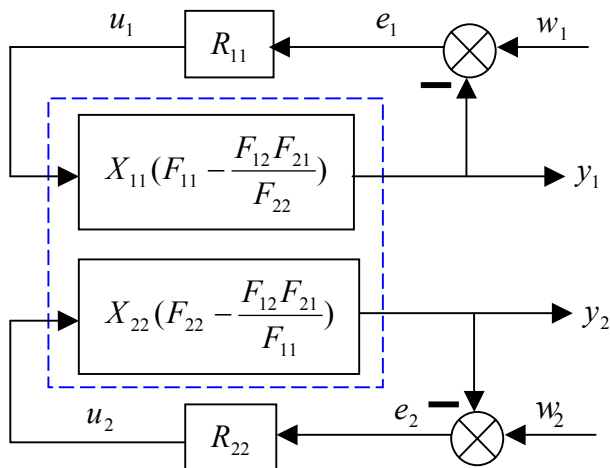
$$F_{11}X_{12} + F_{12}X_{22} = 0 \rightarrow X_{12} = -\frac{F_{12}}{F_{11}}X_{22} \quad (7.3-2)$$

$$F_{21}X_{11} + F_{22}X_{21} = 0 \rightarrow X_{21} = -\frac{F_{21}}{F_{22}}X_{11} \quad (7.3-3)$$

Jsou-li splněny podmínky (7.3-2,3), pak je možno model soustavy s dvěma vstupy a výstupy vyjádřit ve tvaru

$$y(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}(F_{11} - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{22}}) & 0 \\ 0 & X_{22}(F_{22} - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{11}}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}. \quad (7.3-4)$$

Rovnosti (7.3-4) odpovídá náhradní blokové schéma viz obr.7.3.3, které obsahuje obrazové přenosy F_{AX1} , F_{AX2} , a ve zpětné vazbě regulátory R_{11} , R_{22} . Regulační obvody pracují



autonomně, čili žádanou hodnotou w_1 je řízena pouze regulovaná veličina y_1 a žádanou hodnotou w_2 je řízena pouze regulovaná veličina y_2 . Je zřejmé, že je možno tyto regulátory seřizovat nezávisle (odděleně) klasickými postupy na dynamiku soustavy, která je aproximována přenosy:

$$F_{AX1} = X_{11}(F_{11} - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{22}}) \quad (7.3-5)$$

$$F_{AX2} = X_{22}(F_{22} - \frac{F_{12}F_{21}}{F_{11}}). \quad (7.3-6)$$

Obr.7.3.3 Náhradní blokové schéma soustavy se dvěma vstupy a výstupy s účinkem filtru X

Postup návrhu autonomní regulace včetně seřízení regulátoru bude ilustrován na následujícím příkladě.

Příklad 7.3.1

Uvažujme soustavu se dvěma vstupy a výstupy, jejíž dynamika je apro-

ximována přenosovou maticí $F_U(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+1} & \frac{1}{s+1} \\ 0,25 & 1 \\ \frac{1}{(2s+1)^2} & \frac{1}{(2s+1)^2} \end{bmatrix}$

Proveďte:

- 1) Návrh matice filtru $X(s)$ zajišťující autonomnost obvodu
- 2) Regulátor $R_{11}(s)$ seříd'te metodou optimálního modulu, regulátor $R_{22}(s)$ metodou minima lineární regulační plochy.

Řešení:

1) Návrh matice filtru $X(s)$

Prvky matice filtru musí splňovat podmínky:

$$X_{12}(s) = -\frac{F_{12}(s)}{F_{11}(s)} X_{22}(s) = -\frac{1}{\frac{s+1}{2}} X_{22}(s) = -0,5 X_{22}(s)$$

$$X_{21}(s) = -\frac{F_{21}(s)}{F_{22}(s)} X_{11}(s) = -\frac{0,25}{\frac{(2s+1)^2}{1}} X_{11}(s) = -0,25 X_{11}(s)$$

Přenosy $X_{11}(s)$, $X_{22}(s)$ je možno zvolit! Volíme-li $X_{11}(s) = 1$, $X_{22}(s) = 2$ pak $X_{12}(s) = -1$, $X_{21}(s) = -0,25$. Matice filtru je pak rovna $\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0,25 & 2 \end{bmatrix}$.

2) Seřízení regulátorů

Aby bylo možno provést požadované seřízení regulátorů $R_{11}(s)$, $R_{22}(s)$ je třeba určit L-obraz regulačních odchylek $E_1(s)$, $E_2(s)$. Regulační odchylku určíme z přenosů (7.3-5,6) náhradního schématu. Dosazením do (7.3-5) dostaneme obrazový přenos

$$F_{AX1} = X_{11} \left(F_{11} - \frac{F_{12} F_{21}}{F_{22}} \right) = \left[\frac{2}{s+1} - \frac{\frac{0,25}{(2s+1)^2} \cdot 1}{\frac{1}{(2s+1)^2}} \right] = \frac{1,75}{s+1}$$

Dosazením do (7.3-6) dostaneme obrazový přenos

$$F_{AX2} = X_{22} \left(F_{22} - \frac{F_{12} F_{21}}{F_{11}} \right) = 2 * \left[\frac{1}{(2s+1)^2} - \frac{\frac{0,25}{(2s+1)^2} \cdot 1}{\frac{2}{(s+1)}} \right] = \frac{1,75}{(2s+1)^2}$$

Obraz regulační odchylky $E_1(s)$ je roven

$$E_1(s) = \frac{1}{1 + R_{11}(s) F_{AX1}(s)} \cdot W_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{1,75}{s+1} \cdot \frac{r_{11}}{s}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s+1}{s^2 + s + 1,75r_{11}}$$

$$E_2(s) = \frac{1}{1 + R_{22}(s) F_{AX2}(s)} \cdot W_2(s) = \frac{1}{1 + \frac{1,75}{(2s+1)^2} \cdot \frac{r_{02}s + r_{12}}{s}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{(2s+1)^2}{4s^3 + 4s^2 + s(1 + 1,75r_{02}) + 1,75r_{12}}$$

Připomínáme, že vektor regulačních odchylek je možno též spočítat z maticové rovnosti

$$\mathbf{e}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{F}(s)\mathbf{X}(s)\mathbf{R}(s)]^{-1} \mathbf{w}(s)$$

a) Seřízení regulátoru $R_{11} = r_{11}/s$ podle optimálního modulu

Parametry regulátoru musí splňovat podmínku (5.6-6) v "Syntéze regulačních obvodů". Pro jeden parametr regulátoru pak platí

$$\frac{D_0}{C_0} = \frac{D_1}{C_1}. \quad (1)$$

Koeficienty rovnosti (1) D_0, C_0, D_1, C_1 určíme podle (5.6-4) z koeficientů obrazu regulační odchylky $E_1(s)$. Obraz regulační odchylky je

$$E_1(s) = \frac{(s+1)}{s^2 + s + 1,75r_{11}} \cdot \begin{matrix} \alpha_0 = 1,75r_{11}, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \\ \beta_0 = \beta_1 = 1, \beta_2 = 0. \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= (1,75r_{11})^2 & D_0 &= 1, \\ C_1 &= 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1,75r_{11} & D_1 &= 1, \\ C_2 &= 1 & D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dosazením koeficientů D_0, C_0, D_1, C_1 do (1) a po křížovém vynásobení dostaneme

$$\frac{D_0}{C_0} = \frac{D_1}{C_1} \rightarrow \frac{1}{(1,75r_{11})^2} = \frac{1}{1 - 3,5r_{11}} \rightarrow (1,75r_{11})^2 + 3,5r_{11} - 1 = 0.$$

Řešením kvadratické rovnice dostaneme

$$r_{11,1} = \frac{-3,5 + 4,947}{6,125} = 0,2367; \quad r_{11,2} = \frac{-3,5 - 4,947}{6,125} = -1,379.$$

Z podmínky stability plyne, že je možno použít parametr regulátoru $r_{11} = r_{11,1} = 0,2367$.

b) Seřízení regulátoru $R_{22} = (r_{02}s + r_{12})/s$ podle minima lineární regulační plochy

Obraz regulační odchylky je

$$E_2(s) = \frac{(2s+1)^2}{4s^3 + 4s^2 + s(1 + 1,75r_{02}) + 1,75r_{12}}.$$

Nalezneme normovaný polynom jmenovatele $s^3 + s^2 + s \cdot \frac{1 + 1,75r_{02}}{4} + \frac{1,75r_{12}}{4} = 0$. Je zřejmé, že je jen jeden neovlivnitelný koeficient $A_2 = 1$ v normovaném polynomu. Podle věty o násobnosti půlu platí $-A_2 = -1 = s_1 + s_2 + s_3 = 3 \cdot s_I \rightarrow s_I = -1/3$.

Vyjádříme-li polynom jako součin kořenů dostaneme

$$(s + s_I)^3 = (s + 1/3)^3 = s^3 + s^2 + s \frac{1}{3} + \frac{1}{27}.$$

Koeficienty regulátoru R_{22} určíme z rovností:

$$\frac{1 + 1,75r_{02}}{4} = \frac{1}{3} \rightarrow r_{02} = \frac{4}{21}, \quad \frac{1,75r_{12}}{4} = \frac{1}{27} \rightarrow r_{12} = \frac{16}{7 \cdot 27}.$$

Konec příkladu 7.3.1

b) Autonomní obvod s maticí regulátorů ve zpětné vazbě

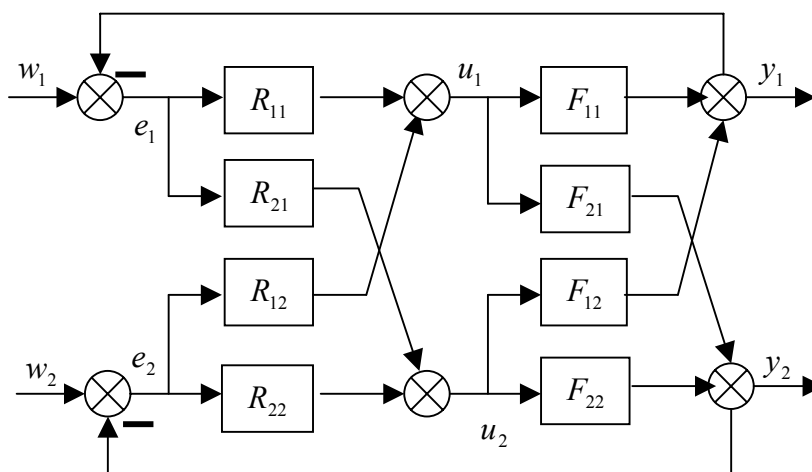
Laplaceův obraz výstupu uzavřeného vícerozměrového obvodu viz obr.7.3.1a je roven

$$y(s) = [I + F_U(s)R(s)]^{-1} F_U(s)R(s)w(s) = F_{yW}(s)w(s).$$

Aby bylo dosaženo autonomnosti obvodu vzhledem k žádané hodnotě, musí matice $F_{yW}(s)$ být diagonální. Tato matice bude diagonální, jestliže bude **diagonální součín** $F_U(s)R(s)$. Postup bude ukázán na soustavě s dvěma vstupy a výstupy. Přenosové matice soustavy a regulátoru $F_U(s)$, $R(s)$ mají strukturu

$$F_U(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix}, \quad R(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Struktura uzavřeného obvodu s maticí regulátoru $R(s)$ ve zpětné vazbě pro dva vstupy a výstupy je na obr.7.3.4



Obr.7.3.4 Struktura uzavřeného obvodu pro dva vstupy a výstupy

Aby součín matic $F_U(s)R(s)$ byl diagonální musí platit

$$F_U(s)R(s) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}R_{11} + F_{12}R_{21} & F_{11}R_{12} + F_{12}R_{22} \\ F_{21}R_{11} + F_{22}R_{21} & F_{21}R_{12} + F_{22}R_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \text{diag.} \quad (3.7-7)$$

Z podmínky (3.7-7) plyne

$$F_{11}R_{12} + F_{12}R_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{12} = -\frac{F_{12}}{F_{11}}R_{22}, \quad (7.3-8)$$

$$F_{21}R_{11} + F_{22}R_{21} = 0 \quad \rightarrow \quad R_{21} = -\frac{F_{21}}{F_{22}}R_{11}. \quad (7.3-9)$$

Návrh autonomního obvodu pro dva vstupy a výstupy s maticí regulátorů $\mathbf{R}(s)$ ve zpětné vazbě a zajištění podmínek (7.3-8,9) bude demonstrován na následujícím příkladě.

Příklad 7.3.2

Uvažujme regulační obvod s dvěma vstupy a výstupy, jehož dynamické vlastnosti jsou aproximovány přenosovou maticí

$$\mathbf{F}_U(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s} \\ -1 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \text{ matice regulátoru je } \mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} R_{11}(s) & R_{12}(s) \\ R_{21}(s) & R_{22}(s) \end{bmatrix}.$$

Proveďte: Návrh regulátorů v matici $\mathbf{R}(s)$, aby byla zajištěna autonomnost obvodu na skokové změny žádaných hodnot.

Řešení: Budeme předpokládat, že matici regulátorů tvoří regulátory typu PID. Platí:

$$R_{11}(s) = \frac{r_{211}s^2 + r_{011}s + r_{111}}{s}, \quad R_{12}(s) = \frac{r_{212}s^2 + r_{012}s + r_{112}}{s},$$

$$R_{21}(s) = \frac{r_{221}s^2 + r_{021}s + r_{121}}{s}, \quad R_{22}(s) = \frac{r_{222}s^2 + r_{022}s + r_{122}}{s}.$$

Aby byla zajištěna autonomnost, musí být splněny podmínky (7.3-8,9). Musí tedy platit

$$R_{12}(s) = \frac{r_{212}s^2 + r_{012}s + r_{112}}{s} = -\frac{1}{s} \cdot \frac{r_{222}s^2 + r_{022}s + r_{122}}{s} = -\frac{s+2}{s} \cdot \frac{r_{222}s^2 + r_{022}s + r_{122}}{s}, \quad (1)$$

$$R_{21}(s) = \frac{r_{221}s^2 + r_{021}s + r_{121}}{s} = -\frac{-1}{1} \cdot \frac{r_{211}s^2 + r_{011}s + r_{111}}{s} = (s+1) \cdot \frac{r_{211}s^2 + r_{011}s + r_{111}}{s}. \quad (2)$$

Křížovým roznásobením převedeme rovnosti (1), (2) na rovnost polynomů

$$r_{212}s^4 + r_{012}s^3 + r_{112}s^2 = -r_{222}s^4 - (r_{022} + r_{222})s^3 - (r_{122} + r_{022})s^2 - 2r_{122}s, \quad (3)$$

$$r_{221}s^2 + r_{021}s + r_{121} = r_{211}s^3 + (r_{011} + r_{211})s^2 + (r_{011} + r_{111})s + r_{111} \quad (4)$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na levé a pravé straně rovnic (3) a (4) dostaneme vazby mezi parametry regulátorů $R_{12}(s)$ a $R_{22}(s)$, a $R_{21}(s)$ a $R_{11}(s)$.

Pro regulátor $R_{12}(s)$ platí

$$\begin{aligned} r_{212} &= -r_{222}, \\ r_{012} &= -(r_{022} + 2r_{222}), \\ r_{112} &= -(r_{122} + 2r_{022}), \\ 0 &= -2r_{122}. \end{aligned} \quad (5)$$

Pro regulátor $R_{21}(s)$ platí

$$\begin{aligned} 0 &= r_{211}, \\ r_{221} &= (r_{011} + r_{211}), \\ r_{021} &= (r_{011} + r_{111}), \\ r_{121} &= r_{111}. \end{aligned} \quad (6)$$

Z rovnosti (5) se určí **přípustná struktura regulátoru** $R_{22}(s)$. Vyplývá z ní, že tento regulátor může být pouze typu PD nebo P, protože integrační zesílení $r_{211} = 0$. Zvolíme-li strukturu regulátoru PD, P pak z těchto rovnic plyne, že regulátor $R_{12}(s)$ je regulátorem typu PID, PI viz tab.7.1.

	R₂₂: PD R₁₂: PID	R₂₂: P R₁₂: PI	R₁₁: PI R₂₁: PID	R₁₁: I R₂₁: PI
D	$r_{212} = -r_{222}$		$r_{221} = r_{011}$	
P	$r_{012} = -(r_{022} + 2r_{222})$	$r_{012} = -r_{022}$	$r_{021} = r_{011} + r_{111}$	$r_{021} = r_{111}$
I	$r_{112} = -2r_{022}$	$r_{112} = -2r_{022}$	$r_{121} = r_{111}$	$r_{121} = r_{111}$

Tab.7.1

Z rovnosti (6) se **určí přípustná struktura regulátoru** $R_{11}(s)$. Vyplývá z ní, že tento regulátor může být typu PI nebo I, protože integrační zesílení $r_{122} = 0$. Zvolíme-li strukturu regulátoru PI, I pak regulátor $R_{21}(s)$ je regulátorem typu PID, PI viz tab.7.1.

Jsou-li splněny podmínky (5) pak regulátorem $R_{11}(s)$ se nezávisle řídí změny žádaných hodnot y_1 podle žádané hodnoty w_1 . Podobně regulátorem $R_{22}(s)$ se řídí y_2 dle w_2 .

Pro seřizování regulátorů $R_{11}(s)$, $R_{22}(s)$ se zpravidla vyžaduje L-obraz regulačních odchylek. Vyjádříme si L-obraz regulační odchylky pro vektor žádaných hodnot

$$e(s) = w(s) - y(s) = w(s) - F_U(s)u_R(s) = w(s) - F_U(s)R(s)e(s)$$

L-obraz vektoru regulačních odchylek po úpravě je roven

$$e(s) = [I + F_U(s)R(s)]^{-1} w(s) = F_{EW}(s)w(s). \quad (7.3-10)$$

Vyjádříme-li součin matic $F_U(s)R(s)$ tak, že za prvky matice $F_U(s)$ dosadíme obrazové přenosy ze zadání, dostaneme

$$F_U(s)R(s) = \begin{bmatrix} F_{11}R_{11} + F_{12}R_{21} & 0 \\ 0 & F_{21}R_{12} + F_{22}R_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} \cdot R_{11} + \frac{1}{s} \cdot R_{21} & 0 \\ 0 & -R_{12} + \frac{1}{s+1} \cdot R_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Zvolíme-li regulátor R_{11} typu PI pak regulátor R_{21} musí být typu PID, regulátor R_{22} typu PD pak regulátor R_{12} musí být typu PID. Dosazením struktur regulátorů do (1) z **TAB.7.1** dostaneme

$$\mathbf{F}_U(s)\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} \cdot \frac{r_{011}s + r_{111}}{s} + \frac{1}{s} \cdot \frac{r_{221}s^2 + r_{021}s + r_{121}}{s} & 0 \\ 0 & -\frac{r_{212}s^2 + r_{012}s + r_{112}}{s} + \frac{1}{s+1} \cdot (r_{222}s + r_{022}) \end{bmatrix}$$

Člen $F_{11}R_{11} + F_{12}R_{21}$ je ve tvaru

$$\begin{aligned} F_{11}R_{11} + F_{12}R_{21} &= \frac{1}{s+2} \cdot \frac{r_{011}s + r_{111}}{s} + \frac{1}{s} \cdot \frac{r_{011}s^2 + (r_{011} + r_{111})s + r_{111}}{s} = \\ &= \frac{r_{011}s^3 + (r_{011} + 4r_{011})s^2 + (2r_{011} + 4r_{111})s + 2r_{111}}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$

Podobně vyjádříme člen $F_{21}R_{12} + F_{22}R_{22}$

$$\begin{aligned} F_{21}R_{12} + F_{22}R_{22} &= \frac{r_{222}s^2 + (r_{022} + 2r_{222})s + 2r_{022}}{s} + \frac{1}{s+1} \cdot (r_{222}s + r_{022}) = \\ &= \frac{r_{222}s^3 + (r_{022} + 4r_{222})s^2 + (4r_{022} + 2r_{222})s + 2r_{022}}{s(s+1)} \end{aligned}$$

Vyjádříme-li člen $1 + F_{11}R_{11} + F_{12}R_{21}$ dostaneme

$$\begin{aligned} 1 + F_{11}R_{11} + F_{12}R_{21} &= 1 + \frac{r_{011}s^3 + (r_{011} + 4r_{011})s^2 + (2r_{011} + 4r_{111})s + 2r_{111}}{s^2(s+2)} = \\ &= \frac{s^3(1 + r_{011}) + (2 + r_{111} + 4r_{011})s^2 + (4r_{111} + 2r_{011})s + 2r_{111}}{s^2(s+2)} \end{aligned}$$

Obdobně je člen $1 + F_{21}R_{12} + F_{22}R_{22}$ roven

$$\begin{aligned} 1 + F_{21}R_{12} + F_{22}R_{22} &= 1 + \frac{r_{222}s^3 + (r_{022} + 4r_{222})s^2 + (4r_{022} + 2r_{222})s + 2r_{022}}{s(s+1)} = \\ &= \frac{r_{222}s^3 + (r_{022} + 4r_{222} + 1)s^2 + (2r_{222} + 4r_{022})s + 2r_{022}}{s(s+1)} \end{aligned}$$

Inverzní matice $[I + \mathbf{F}_U(s)\mathbf{R}(s)]^{-1}$ je diagonální a proto můžeme L-obraz regulační odchylky $E_1(s)$ a $E_2(s)$ zapsat odděleně

$$E_1(s) = \frac{s^2(s+1)}{s^3(1 + r_{011}) + (2 + r_{111} + 4r_{011})s^2 + (4r_{111} + 2r_{011})s + 2r_{111}} \cdot W_1(s)$$

$$E_2(s) = \frac{s+1}{r_{222}s^3 + (r_{022} + 4r_{222} + 1)s^2 + (2r_{222} + 4r_{022})s + 2r_{022}} \cdot W_2(s)$$

Nyní je možno provést nezávisle seřízení parametrů regulátorů $R_{11}(s)$ a $R_{22}(s)$ a z těchto parametrů pak vypočítat parametry regulátorů $R_{12}(s)$ a $R_{21}(s)$ aby byla zajištěna autonomnost uzavřeného obvodu.

Konec příkladu 7.3.2

Na závěr této kapitoly je třeba konstatovat, že byly vyloženy pouze elementární základy popisu vícerozměrových systémů a byl vyložen princip autonomní regulace vícerozměrových systémů. Moderní přístupy analýzy a syntézy dynamických systémů s více vstupy a výstupy najdou zájemci v literatuře [2]. Autoři rozebírají i problematiku robustnosti vícerozměrových regulačních obvodů.

7.4 SOFTWAREVÁ PODPORA

V této kapitole rozšíříme aplikaci funkcí `tf`, `zpk` na vícerozměrové systémy. Na jednoduchých příkladech ukážeme jejich aplikace.

1)

Funkce `tf`

Vytvoří (TF-transfer function) pro MIMO model, jehož dynamika je definována přenosovou maticí, ze zadaných koeficientů čítenelů a jmenovatelů přenosovou maticí. Přenosovou matici vypíše .

Syntaxe funkce

```
sys = tf(num,den)
```

kde **sys** je TF objekt, model, jehož dynamické vlastnosti jsou definovány přenosovou maticí ze zadaných koeficientů čítenelů a jmenovatelů,

num je řádkový vektor, ve kterém jsou uloženy jednotlivé čitatele obrazových přenosů F_{ij} , $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, p$ kde „ q, p “ je počet výstupních, vstupních veličin. Koeficienty polynomu čítenel obrazového přenosu F_{ij} jsou $B_{ij} = [b_{m,ij}, b_{m-1,ij}, \dots, b_{1,ij}, b_{0,ij}]$. Řádkový vektor má strukturu

$$\mathbf{num} = \{ B_{11} \ B_{12} \ \dots \ B_{1p}; B_{21} \ B_{22} \ \dots \ B_{2p}; \dots; B_{q1} \ B_{q2} \ \dots \ B_{qp} \}$$

den je řádkový vektor, ve kterém jsou koeficienty polynomů jmenovatelů přenosové matice ve tvaru $A_{i,j} = [a_{n,ij}, a_{n-1,ij}, \dots, a_{1,ij}, a_{0,ij}]$. Řádkový vektor **den** pak má strukturu

$$\mathbf{den} = \{ A_{11} \ A_{12} \ \dots \ A_{1p}; A_{21} \ A_{22} \ \dots \ A_{2p}; \dots; A_{q1} \ A_{q2} \ \dots \ A_{qp} \} .$$

Příklad 7.4.1

Vytvořte přenosovou matici $F = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{0,25}{(2s+1)^2} & \frac{0,25}{(2s+1)^2} \end{bmatrix}$ jako LTI objekt.

Řešení: Nejednodušší způsob zadání matice je na obr. 7.4.1a. LAF je na obr.7.4.2.

» $F=[tf(1,[1 \ 1]) \ tf(2,[1 \ 1]);tf(0.25,[4 \ 4 \ 1]) \ tf([1 \ 1],[4 \ 4 \ 1])]$

Transfer function from input 1 to output...

$$\#1: \frac{1}{s + 1}$$

$$\#2: \frac{0.25}{4s^2 + 4s + 1}$$

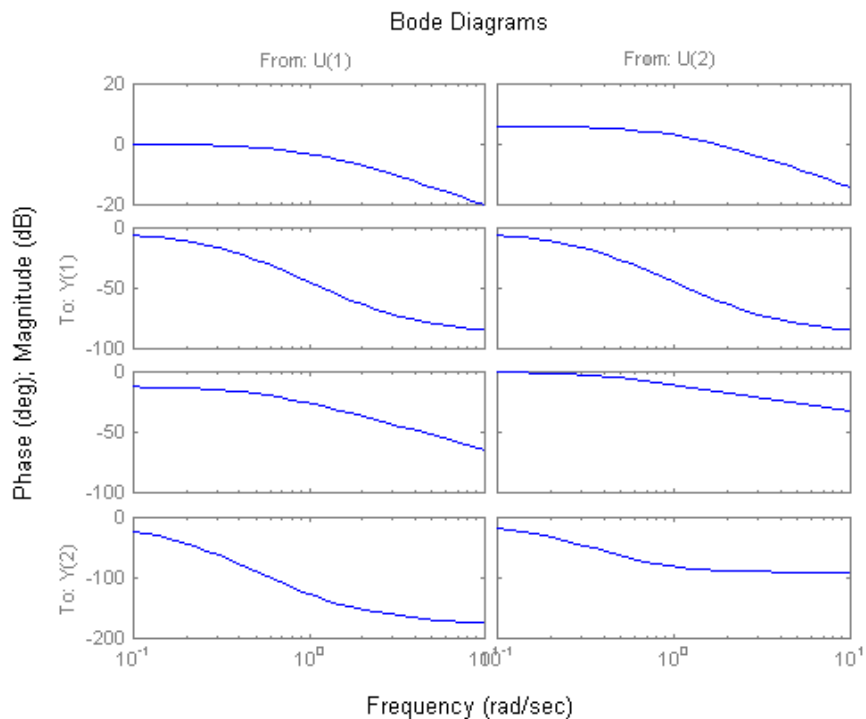
Transfer function from input 2 to output...

$$\#1: \frac{2}{s + 1}$$

$$\#2: \frac{s + 1}{4s^2 + 4s + 1}$$

Obr.7.4.1a Zápís matice

» `bode(F)`



Obr.7.4.1b Logaritmické a fázové charakteristik přenosové matice F

Konec příkladu 7.4.1

Příklad 7.4.2

Vytvořte přenosovou matici (LTI objekt) a nakreslete přechodové charakteristiky k Př.7.4.2

```
» num={1 1;-1 1};
» den={[1 2] [1 0];1 [1 1]};
» sm=tf(num,den)
```

Řešení:

Transfer function from input 1 to output...

$$\#1: \frac{1}{s + 2}$$

$$\#2: -1$$

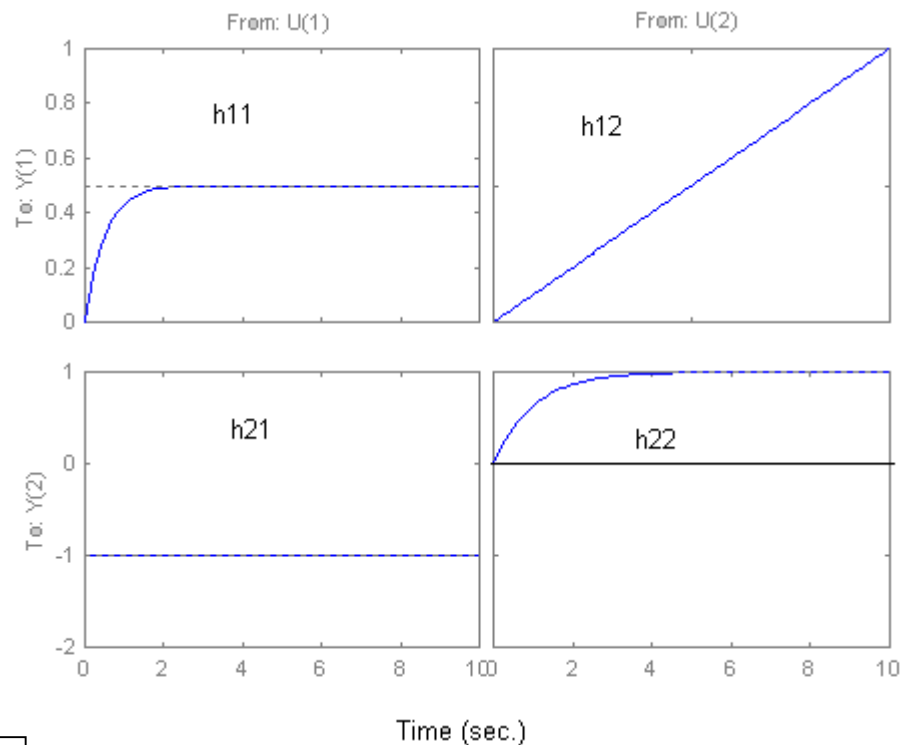
Transfer function from input 2 to output...

$$\#1: -\frac{1}{s}$$

$$\#2: \frac{1}{s + 1}$$

Obr.7.4.2a

Příkazy v MATLABu jsou na obr.7.4.1a. Přechodové charakteristiky jsou na obr 7.4.1.b.

Obr.7.4.2b Přechodové charakteristiky h_{11} , h_{12} , h_{21} , h_{22}

Konec příkladu 7.4.2

2)

Funkce **zpk**

Vytvoří (TF-transfer function) vícerozměrového modelu, jehož dynamika je definována obrazovým přenosem ze zadaných nul, pólů a zesílení pro každý dílčí přenos F_{ij} , $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 1, 2, \dots, p$ kde „ q , p “ je počet výstupních, vstupních veličin. Obrazový přenos vypíše.

Syntaxe funkce

$$\text{sys} = \text{zpk}(\mathbf{Z}, \mathbf{P}, \mathbf{K})$$

kde **sys** je TF objekt, model, jehož dynamické vlastnosti jsou definovány nulami, póly a zesílením obrazových přenosů

$$F_{ij}, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, p$$

Z Nuly přenosu F_{ij} jsou na řádkovém vektoru $Z_{ij} = [s_{Bm,ij}, s_{Bm-1,ij}, \dots, s_{B1,ij}]$ je vektor, který obsahuje předepsané nuly,

$$\mathbf{Z} = \{Z_{11} \ Z_{12} \ \dots \ Z_{1p}; Z_{21} \ Z_{22} \ \dots \ Z_{2p}; \dots; Z_{q1} \ Z_{q2} \ \dots \ Z_{qp}\}$$

P Póly přenosu F_{ij} jsou na řádkovém vektoru $P_{ij} = [s_{An,ij}, s_{An-1,ij}, \dots, s_{A1,ij}]$ je vektor, který obsahuje předepsané póly

$$\mathbf{P} = \{P_{11} \ P_{12} \ \dots \ P_{1p}; P_{21} \ P_{22} \ \dots \ P_{2p}; \dots; P_{q1} \ P_{q2} \ \dots \ P_{qp}\}$$

K je vektor, který obsahuje předepsané zesílení

$$\mathbf{K} = [K_{11} \ K_{12} \ \dots \ K_{1p}; K_{21} \ K_{22} \ \dots \ K_{2p}; \dots; K_{q1} \ K_{q2} \ \dots \ K_{qp}]$$

Příklad 7.4.3

Vytvořte přenosovou matici (LTI objekt) ze zadaných nul, pólů a zesílení

Řešení: Zadávání a vytvoření přenosové matice je demonstrováno na obr. 7.4.3.

```

» z={[] [];[] []};
» p={[-1] [-1];[-1 -0.5] [-0.5 -0.5]};
» k=[2 1;2 0.25];
» F1=zpk(z,p,k)

```

Zero/pole/gain from input 1 to output...

$$\#1: \frac{2}{(s+1)}$$

$$\#2: \frac{2}{(s+1)(s+0.5)}$$

Zero/pole/gain from input 2 to output...

$$\#1: \frac{1}{(s+1)}$$

$$\#2: \frac{0.25}{(s+0.5)^2}$$

Konec příkladu 7.4.3

```
» step(F1)
```

Literatura

- [1] Nise, S.N.: Control Systems. John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [2] Skogestad S., Postlethwaite, I.: Multivariable feedback. Analysis and Design. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2000.
- [2] Phillips, Ch., L.,-Harbor R.,D. : Feedback Control Systems. Prentice Hall, 2000.
- [3] Lurie, B., J.,-Enright, J., P.: Clasical Feedback Control. With Matlab. Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2000.[6] Bode, H.: MATLAB in der Regelungstechnik.Analyse linearer Systeme. B.G.Teubner Stuttgart,Leipzig, 1998.
- [7] Grace, A.-Laub, J. A.-Little, J. N.-Thompson, C. M.: Control System Toolbox. For Use with MATLAB. User's Guide. The Math Works,Inc. 1995.